Tehtävä: 1. Esitä z muodossa $a + bi$, kun (a) $z = (2+3i)^2$ (b) $z = \frac{-6+2i}{6-i}$
(c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1 * z_2}$, missä $z_1 = 2 - 2i$ ja $z_2 = 1 + 6i$.

Vastaus: (a) $z = (2+3i)^2 = (2+3i)(2+3i) = 4 + 6i + 6i - 9 = -5 + 12i$
(b)$z = \frac{-6+2i}{6-i} = \frac{(-6+2i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{-36-6i+12i-2}{\sqrt{6^2+i^2}^2} = \frac{-38+6i}{37} = \frac{-38}{37} + \frac{6}{37}i$
(c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1}^{(z_2} + \frac{1}{z_1 * z_2} = \frac{1}{z} = \frac{z_2}{z_1 * z_2} + \frac{1}{z_1 * z_2} = \frac{z_2+1}{z_1 * z_2} \Rightarrow z = \frac{z_1 * z_2}{z_2+1}$
$\frac{(2-2i)(1+6i)}{(1+6i)+1} = \frac{14+10i}{2+6i} = \frac{(14+10i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)} = \frac{88-64i}{40} = \frac{11}{5} - \frac{8i}{5}$

Tehtävä: 2. Olkoon $z = 4 - 4i$ ja $w = 1 - \sqrt{3}i$. Ilmoita muodossa $r * exp(j\theta)$
(a) z ja w (b) $z * w$ (c) $\frac{z}{w}$ (d) Määritä $2 * exp(i * \pi/3)$ ja $4 * exp(-i * \pi/2)$ summa muuttamalla ne ensin muotoon $x + yi$.

Vastaus: (a) $z = 4 - 4i = \sqrt{4^2 + 4^2} * e^{-i*\pi/4} = 4 * \sqrt{2} * e^{-i*\pi/4}$, Sillä $tan(\theta) = 4/-4 = -1 \Rightarrow \theta = -\pi/4$
$w = 1 - \sqrt{3}i = \sqrt{1^2 + 3} * e^{-i*\pi/3} = 2 * e^{-i*\pi/3}$, sillä $tan(\theta) = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\pi/3$
(b) $z * w = (4\sqrt{2} * e^{-i*\pi/4})(2 * e^{-i*\pi/3}) = 2^{5/2} * 2 * e^{-i*\pi/4} * e^{-i*\pi/3}$
$= 2^{7/2} * e^{-i*(\pi/4+\pi/3)} = 2^{7/2} * e^{-i*7*\pi/12}$
(c) $z/w = (2^{5/2} * e^{-i*\pi/4})/(2 * e^{-i*\pi/3}) = 2^{3/2} * e^{-i(\pi/3-\pi/4)} = 2^{3/2} * e^{i*\pi/12}$
(d) $2 * e^{i*\pi/3} + 4 * e^{-i*\pi/2} = 2 * (cos(\pi/3) + i * sin(\pi/3)) + 4 * (cos(-\pi/2) + i * sin(-\pi/2)) = 2 * (1/2 + i * \sqrt{3}/2) + 4 * (0 - i) = 1 + \sqrt{3}i - 4i = 1 + (\sqrt{3} - 4)i$

Tehtävä: 3. Ratkaise $x^2 - 4ix - 5 - i = 0$, käytä 2. asteen ratkaisukaavaa.
Mikä on diskriminantti D ja juuret x_1 ja x_2 muodossa $2i + r * exp()$

Vastaus: Toisen asteen ratkaisukaava muotoa $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Sijoitetaan:
$\frac{4i \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4*1*(-5-i)}}{2*1} = \frac{4i \pm \sqrt{-16+20+4i}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{4+4i}}{2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{1+i}}{2} = 2i \pm \sqrt{1+i} \Rightarrow$
$x = 2i - \sqrt{1+i} \vee x = 2i + \sqrt{1+i}$Kompleksiluvun $\sqrt{1+i}$ polaarimuoto on $2^{1/4} * e^{i\pi/8}$
V: $D = 4 + 4i$, $x_1 = 2i - 2^{1/4} * e^{i*\pi/8}$ ja $x_2 = 2i + 2^{1/4} * e^{i*\pi/8}$.

Tehtävä: 4. Hae kaikki luvun $-3 + 3i$ kolmannet juuret.

Vastaus: $z = -3 + 3i$, $r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. $tan\theta = \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3*\pi}{4} \Rightarrow$
$z = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ Nyt eräs juuri on $w_1 = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{\frac{\pi}{4}i}$,
sillä $w_1^3 = ((3\sqrt{2})^{1/3})^3 * e^{\frac{\pi}{4}*3*i} = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = z$ Juuret ovat kulman $2\pi/3$ (Kolmasosakaaren) välein eli:
$w_2 = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi/3)} = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{\frac{11\pi}{12}i}$ ja
$w_3 = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{i(\frac{\pi}{4}+2*2\pi/3)} = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{\frac{19\pi}{12}i}$
V: $w_1 = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{\frac{\pi}{4}i}$, $w_2 = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{\frac{11\pi}{12}i}$ ja $w_3 = (3\sqrt{2})^{1/3} * e^{\frac{19\pi}{12}i}$

Tehtävä: 6. Matlab-tehtävä.

Vastaus: MATLAB-sivu tehtävien lopussa.

Tehtävä: 7. (a) Osoita, että i on polynomin $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ nollakohta ja hae kaikki p:n nollakohdat. (b) Jaa polynomi p ensimmäisen asteen tekijöihin.

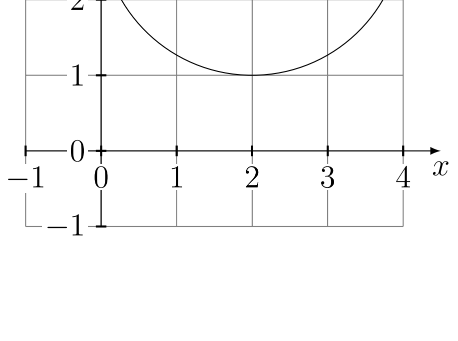
Vastaus: (a) Lasketaan $p(i)$:
$i^4 - 4i^3 + 5i^2 - 4i + 4 = 0$
$1 + 4i - 5 - 4i + 4 = 0$
$0 = 0 \Rightarrow Tosi$. Koska i on nollakohta, myös i:n liittoluku $\bar{i} = -i$ on. Tästä saadaan $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ Selvitetään jäljelle jäävä 2. asteen yhtälö:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 4 \\
\hline
x^2 + 1 & x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 \\
 & -x^4 \qquad\quad -x^2 \\
\hline
 & -4x^3 + 4x^2 - 4x \\
 & 4x^3 \qquad\quad +4x \\
\hline
 & 4x^2 \qquad\quad +4 \\
 & -4x^2 \qquad\quad -4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Ratkaistaan $x^2 - 4x + 4$ nollakohdat ratkaisukaavalla:
$\frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4*1*4}}{2*1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$ (Kaksoisjuuri)
V: Nollakohdat ovat i, $-i$ ja 2.
(b) Nollakohdista: $p(x) = (x - i)(x + i)(x - 2)(x - 2)$

Tehtävä: 8. Ratkaise yhtälö $|\frac{z-i}{z-1-2i}| = \sqrt{2}$ merkitsemällä $z = x + iy$ Piirrä kuva ratkaisujoukosta kompleksitasossa.

Vastaus: Merkitään $z = x + iy \Rightarrow |\frac{x-iy-i}{x+iy-1-2i}| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|x+(y-1)i|}{|(x-1)+(b-2)i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+(b-1)^2}{(x-1)^2+(y-2)^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+(b-1)^2 = 2((x-1)^2+(y-2)^2)$
$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 - 8y + 8 \Leftrightarrow$
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \Rightarrow$
Ympyrä, jonka säde $r = 2$ ja kp: $(2, 3)$.



```
close all
clear all
disp('K6 a)')
x=linspace(0,3,1000);
z=exp(i*x);
plot(real(z),imag(z), 'k-')
hold on
axis equal
axis(1.1*[-1,1,-1,1])
grid minor

disp('K6 b)')
[X,FV,EX,O] = fzero(@(x) real(exp(i*x)), [0 3]);
X
disp('X*2-pi=0')
disp('X=pi/2')
disp('Oikein, sillä cos(pi/2) = 0')
```

```
K6 a)
K6 b)

X =

    1.5708

X*2-pi=0
X=pi/2
Oikein, sillä cos(pi/2) = 0
```