

MAT-01160 Matematiikka 1, harjoitus 4, T5

20. syyskuuta 2015

Tehtävä: Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - x) = 12.$$

Toisin sanoen todista kyseinen raja-arvo $\epsilon - \delta$ -todistuksella.

Ratkaisu: *Todistus.* Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja $\delta = \min\left(2, \frac{\epsilon}{11}\right) > 0$.

Jos $0 < |x - 4| < \delta$ niin $2 < x < 6$ ja edelleen

$$\begin{aligned} |(x^2 - x) - 12| &= |(x^2 - x) - 12| \\ &= |(x^2 - 16) - (x - 4)| \\ &\leq |x^2 - 16| + |x - 4| \\ &= |(x + 4)(x - 4)| + \left|\frac{x - 4}{x + 4}\right| \\ &\stackrel{x+4 > 1}{\leq} |x - 4 + 8||x - 4| + |x - 4| \\ &\leq (|x - 4| + 8)|x - 4| + |x - 4| \\ &< (\delta + 8)\delta + \delta \\ &\stackrel{\delta \leq 2}{\leq} 11\delta \\ &\stackrel{\delta \leq \frac{\epsilon}{11}}{\leq} \epsilon \end{aligned}$$

□