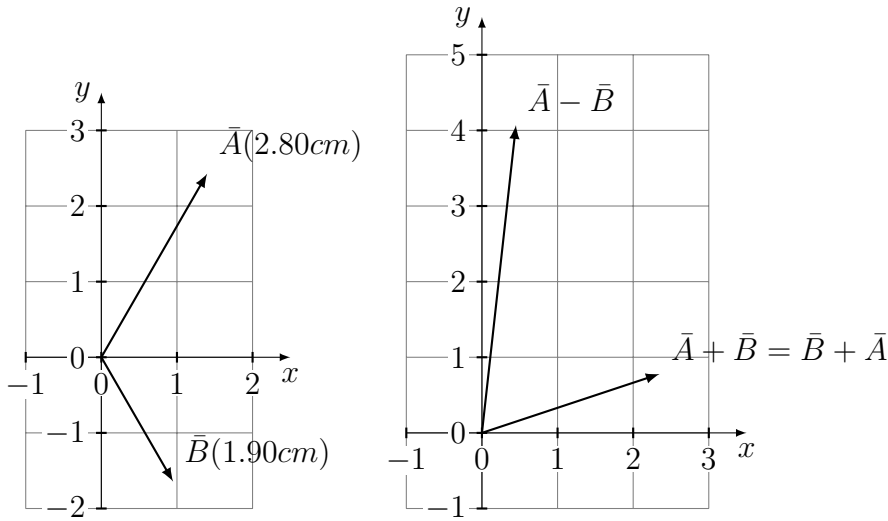


Tehtävä: 1. Laske (a) $\vec{A} + \vec{B}$ (b) $\vec{A} - \vec{B}$ (c) $\vec{B} + \vec{A}$ (d) $\vec{A} \cdot \vec{B}$



Vastaus: Lasketaan vektorien komponentit:

$$\vec{A}_x = 2.80\text{cm} * \cos(60^\circ) = 1.40\text{cm}, \vec{A}_y = 2.80\text{cm} * \sin(60^\circ) = 2.42487\text{cm}$$

$$\vec{B}_x = 1.90\text{cm} * \cos(-60^\circ) = 0.95\text{cm}, \vec{B}_y = 1.90\text{cm} * \sin(-60^\circ) = -1.64545\text{cm}$$

(a)

$$\vec{A}_x + \vec{B}_x = 1.40\text{cm} + 0.95\text{cm} = 2.35\text{cm}$$

$$\vec{A}_y + \vec{B}_y = 2.42487\text{cm} + (-1.64545\text{cm}) = 0.77942\text{cm}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 2.35\text{cm} * \vec{i} + 0.78\text{cm} * \vec{j}$$

(b)

$$\vec{A}_x - \vec{B}_x = 1.40\text{cm} - 0.95\text{cm} = 0.45\text{cm}$$

$$\vec{A}_y - \vec{B}_y = 2.42487\text{cm} - (-1.64545\text{cm}) = 4.07015\text{cm}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = 0.45\text{cm} * \vec{i} + 4.07\text{cm} * \vec{j}$$

(c) Vektoreille pätee vaihdantalaki, ks. kohta a.

(d)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| * |\vec{B}| * \cos(\theta) = \vec{A}_x * \vec{B}_x + \vec{A}_y * \vec{B}_y$$

$$2.80\text{cm} * 1.90\text{cm} * \cos(\theta) = 1.40\text{cm} * 0.95\text{cm} + 2.42487\text{cm} * (-1.64545\text{cm})$$

$$\cos(\theta) = \frac{-2.660\text{cm}}{5.32\text{cm}} \Rightarrow \arccos\left(\frac{-2.660\text{cm}}{5.32\text{cm}}\right) = \theta = 120^\circ$$

Tehtävä: 2. Laske vektorien $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ välinen kulma.

Vastaus: Sovelletaan pistetuloa, merkitään vektoreita \vec{A} ja \vec{B}

$$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.73205, |\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.73205$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| * |\vec{B}| * \cos(\theta) = \vec{A}_x * \vec{B}_x + \vec{A}_y * \vec{B}_y + \vec{A}_z * \vec{B}_z$$

$$1.73205 * 1.73205 * \cos(\theta) = 1 * 1 + 1 * (-1) + 1 * (-1)$$

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{3} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109.47^\circ$$

Tehtävä: 3. (a) Laske auton paikka x ja hetkellinen kiihtyvyys a hetkinä, jolloin nopeus v on nolla. (b) Piirrä auton liikkeestä kuvaajat $x - t$, $v_x - t$ ja $a_x - t$ aikavälillä $0.0 \rightarrow 2.0s$.

Auton sijaintia ajan funktiona kuvaa $x(t) = 2.17m + (4.80\frac{m}{s^2})t^2 - (0.100\frac{m}{s^6})t^6$

Vastaus: Nopeus saadaan derivoimalla funktio $x(t)$, $v(t) = x(t)\frac{d}{dt}$

$v(t) = 9.6t - 0.6t^5$, Selvitetään yhtälön $v(t)$ juuret:

$$0 = t(9.6 - 0.6t^4) \Rightarrow t = 0 \vee 9.6 - 0.6t^4 = 0$$

$$9.6 - 0.6t^4 = 0 \Leftrightarrow t^4 = \frac{9.6}{0.6} \Rightarrow t = \pm \sqrt[4]{\frac{9.6}{0.6}} = \pm 2 \text{ (negatiivinen ei kelpaa)} \Rightarrow$$

$$t = 0 \vee t = 2$$

(a)

Lasketaan auton paikka hetkinä $t = 0$ ja $t = 2$:

$$x(0) = 2.17m + (4.80m/s^2) * 0^2 - (0.100m/s^6) * 0^6 = 2.17m$$

$$x(2) = 2.17m + (4.80m/s^2) * 2^2 - (0.100m/s^6) * 2^6 = 2.17m + 19.2m - 6.4m = 14.97m \approx 15.0m$$

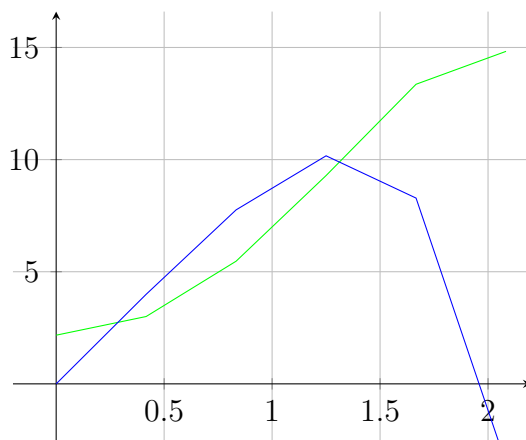
Kiihtyvyys saadaan derivoimalla funktio $v(t)$, $a(t) = v(t)\frac{d}{dt}$

$a(t) = 9.6(m/s^2) - 3(m/s^6)t^4$, lasketaan kiihtyvyys hetkinä $t = 0$ ja $t = 2$:

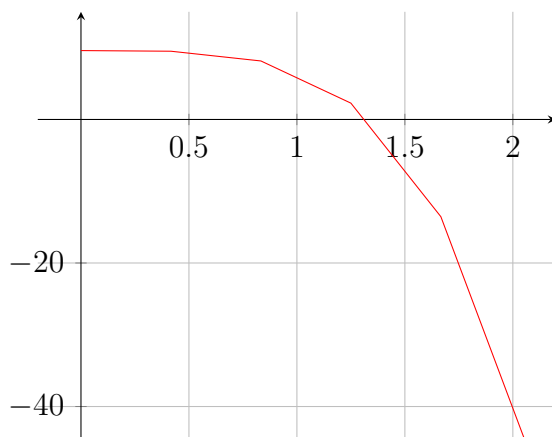
$$a(0) = 9.6m/s^2 - (3m/s^6) * 0^4 = 9.6m/s^2$$

$$a(2) = 9.6m/s^2 - (3m/s^6) * 2^4 = -38.4m/s^2$$

(b) 1. Vihreä $x(t)$, Sininen $v(t)$,



3. Punainen $a(t)$



Tehtävä: 4. (a) Laske pallon kiihtyvyys syötön aikana? (b) Kuinka pitkän matkan pallo kulki mailan mukana? Pallon irtaantumisnopeus on $73.14m/s$ ja kontaktiaika $30.0ms$.

Vastaus: (a) $\Delta v = 73.14m/s, \Delta t = 30.0 * 10^{-3}s$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{73.14m/s}{30.0 * 10^{-3}s} = 2438m/s^2 \approx 2440m/s^2$$

$$(b) x = x_0 + v_0 * t + \frac{1}{2} * a * t^2$$

$$x = 0 + 0 * (30.0 * 10^{-3}s) + \frac{1}{2} * (2438m/s^2) * (30 * 10^{-3}s)^2 = 1.0971m \approx 1.10m$$

Tehtävä: 5. Tiilen vapaapudotus talon katolta kestää $2.50s$. (a) Kuinka korkea tehtävän talo on? (b) Mikä on tiilen nopeus juuri ennen maahan osumista? (c) Piirrä kuvaajat $a_y - t$, $v_y - t$ ja $y - t$ (putoamissuunta y).

Vastaus: Käytetään putoamiskiihtyvyytenä $a = 9.87m/s^2$.

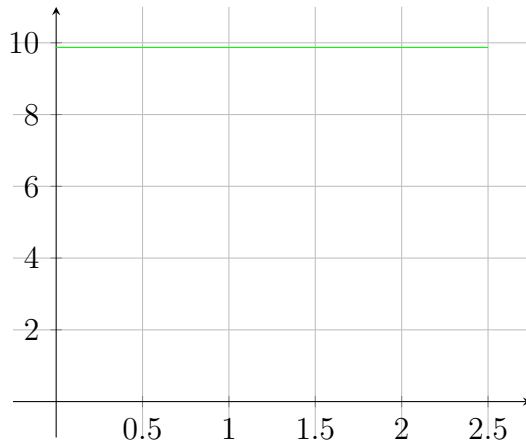
$$(a) x = x_0 + v_0 * t + \frac{1}{2} * a * t^2$$

$$x = 0 + 0 * (2.50s) + \frac{1}{2} * (9.87m/s^2) * (2.50s)^2 = 30.84375m \approx 30.8m$$

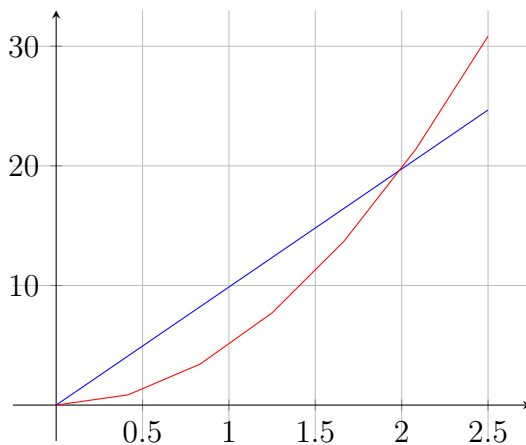
Matkaa katolta maahan on $30.8m$, eli talo on $30.8m$ korkea.

$$(b) v = at \Rightarrow v = (9.87m/s^2) * (2.50s) = 24.675m/s \approx 24.7m/s$$

(c) 1. Vihreä $a_y(t)$,



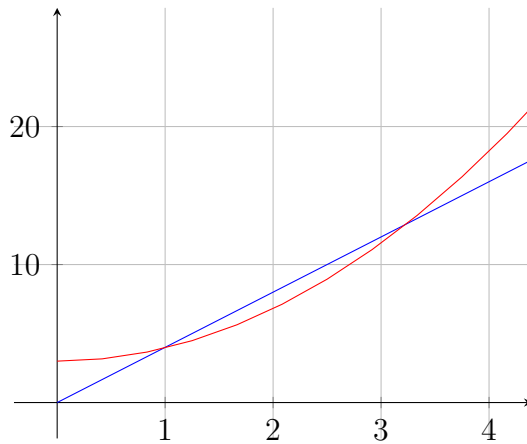
2. Sininen $v_y(t)$, Punainen $y(t)$ (etäisyys katosta)



Tehtävä: 6. (a) Arvioi autojen A ja B nopeuksia ja kiihtyvyyksiä hetkillä $t = 0s$, $1s$ ja $3s$. (b) Millä hetkillä autot ovat samssa kohdassa? (c) Hahmottele kuvaaja $v - t$ (d) Onko nopeus sama jollakin hetkellä? (e) Ohittaako auto A auton B? Jos, niin millä hetkellä?

Huom! Tehtävämonisteessä $x - t$ kuvaaja, ohessa lähes samanlainen.

(Käytetty $A(t) = 0.95 * t^2 + 3$ ja $B(t) = 4 * t$)

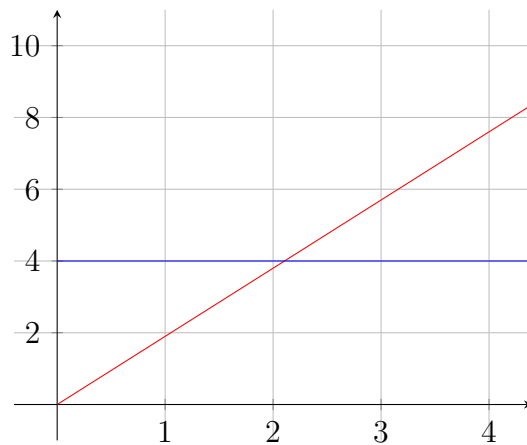


Vastaus: (a) kun $t = 0s$: $v_A = 0$, $a_A = 0$ ja $v_B = 4m/s$, $a_B = 0$,
 kun $t = 1s$: $v_A = 2m/s$, $a_A = 1.9m/s^2$ ja $v_B = 4m/s$, $a_B = 0$,
 kun $t = 3s$: $v_A = 5.9m/s$, $a_A = 1.9m/s$ ja $v_B = 4m/s$, $a_B = 0$.

(b) Autot ovat samssa kohdassa kun ne ovat kulkeneet saman matkan x .

Näin ollen autot ovat samoissa kohdissa hetkillä $t = 0.9s$ ja $t = 3.1s$

(c) kuvaaja $v - t$, Punainen auto A ja Sininen auto B



Auton A kuvaaja on suunnilleen paraabeli, joten derivaatta on suora, auton B kuvaaja on suora, joten derivaatta on vakio.

(d) Nopeus on sama kuvaajien leikkauspisteessä $t = 2.1$, tämä havaitaan myös $x - t$ kuvaajassa samana kulmakertoimena.

(e) Kyllä. Hetkellä $t = 3.1s$. Tämä havaitaan $x - t$ kuvaajassa leikkauspisteenä, jonka jälkeen A on B:n yläpuolella.