MAT-01160 2015-01 Teemu Salminen 256544

Tehtävä: 1. Osoita osittelulaki ja suora todistus totuustaulutarkastelun avulla.

Osittelulaki: Täytetään totuustaulu:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Suora todistus: Täytetään totuustaulu:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Tehtävä: 2. Määritä (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cup C$ (d) $A \cap C$, kun

$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 7\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} : x \textit{ on parillinnen}, x \leq 16\}$ ja $C = \{x \in \mathbb{N} : x = 2^n, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 5\}$

Vastaus:

(a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16\}$

(b) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(c) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 32\}$

(d) $A \cap C = \{2, 4\}$

Tehtävä: 3. Selvitä onko lause tosi vai epätosi:

(a) $\exists x \in [1, 7] : x < 10$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0$

(c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0$

(d) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R} : \frac{y}{x} = 3$

Vastaus:

(a) Esimerkiksi $x = 3 \Rightarrow 3 < 10 \Rightarrow Tosi$

(b) Esimerkiksi $x = 3 \Rightarrow 3^2 - 2 * 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 - 6 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \Rightarrow Epätosi$

(c) Esimerkiksi $x = 1 \Rightarrow 1^2 - 2 * 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow Tosi$

(d) $\frac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow y = 3 * x$ Luonnollinen luku kerrottuna luonnollisella luvulla on reaaliluku. $\Rightarrow$ Tosi

Tehtävä: 4. Puiston harvennuksen yhteydessä kaadetut puut kuivataan kasassa ja toimitetaan lämpövoimalaan poltettavaksi. Tuoreen pöllin painosta on vettä 38 % ja kasassa kuivatun pöllin painosta on vettä 22 %. Täysin vedettömän puuaineksen poltosta saadaan energiaa 5,3 kWh/kg. Kosteaa puuta polttaessa aiheuttaa vesi 0,7 kWh:n energiahävikin vesikiloa kohti.

(a) Montako kiloa alkuaan 23.0kg painoinen pölli keveni kasassa kuivattaessa?

(b) Montako prosenttia enemmän energiaa saadaan kuivatusta pöllistä verrattuna siihen, että sama pölli olisi poltettu tuoreena? Pöllin massaa ei tunneta.

Vastaus:

$p_0 = 0.38, p_1 = 0.22, q_0 = \frac{0.38}{1-0.38} = 0.612903, q_1 = \frac{0.22}{1-0.22} = 0.282051, M = 23.0$
p on veden massaprosentti ja q on veden massasuhde puun massaan M nähden.

(a)

$v_0 = p_0 * M = 0.38 * 23.0 = 8.74$ Vesi alussa.

$m = (1 - p_0) * M = M - v_0 = 23.0 - 8.74 = 14.26$ Puun massa.

$v_1 = q_1 * m = 0.282051 * 14.26 = 4.02205$ Vesi lopussa.

$\Delta v = v_0 - v_1 = 8.74 - 4.02205 = 4.71795 \approx 4.7$ Veden muutos

V: pölli keveni 4.7kg

(b)

$c_m = 5.3, c_v = -0.7$

$\frac{E_1}{E_0} = \frac{c_m * m + c_v * v_1}{c_m * m + c_v * v_0} = \frac{c_m + q_1 * c_v}{c_m + q_0 * c_v} \Rightarrow$ Vettä saadaan $\frac{E_1}{E_0} - 1$ prosenttia enemmän massasta m riippumatta. $\frac{c_m + q_1 * c_v}{c_m + q_0 * c_v} = \frac{5.3 + 0.282051 * -0.7}{5.3 + 0.612903 * -0.7} = 1.047546 \Rightarrow$Energiaa saadaan $1.047546 - 1 = 0.047546 = 4.7546\% \approx 4.8\%$ enemmän.

V: Energiaa saadaan 4.8% enemmän.

Tehtävä: K6 Olkoot n ja m kokonaislukuja. Osoita:

(a) Jos n ja m ovat parittomia, niin nm on pariton.

(b) jos n^4 on pariton, niin n on pariton.

Vastaus:

(a)

Jos n ja m ovat parittomia, $n+1$ ja $m+1$ ovat parillisia.

$(n+1)*(m+1) = nm + n + m + 1$

$nm = -n - m - 1$ jos n ja m on parittomia, myös $-n$ ja $-m$ ovat. Kahden parittoman luvun summa (tai erotus) on aina parillinen. Parillinen ± 1 on pariton $\Rightarrow -(n+m+1) = nm$ on pariton. $\square$

(b)

Käänteinen todistus: Jos n on parillinen, niin n^4 on parillinen.

Jos n on parillinen, niin $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$.

Korotetaan puolittain neljänteen, $n^4 = (2k)^4 = 16k^4 = 2(8k^4)$.

Koska $k \in \mathbb{Z}$ myös $8k^4 \in \mathbb{Z}$.

Siis: $n^4 = 2p$, kun $p = 8k^4 \in \mathbb{Z}$

Eli n^4 on parillinen. $\square$

Tehtävä: H7 Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $\forall \varepsilon > 0 : x \leq \varepsilon,\ niin\ x \leq 0$.

Vastaus: $P = \forall \varepsilon > 0 : x \leq \varepsilon, Q = x \leq 0$

Väite muotoa $P \Rightarrow Q$, pätee $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$, epäsuora todistus:

$\neg(P) = \neg(\forall \varepsilon > 0 : x \leq \varepsilon) = \exists \varepsilon > 0 : x > \varepsilon$

$\neg(Q) = \neg(x \leq 0) = x > 0$

$\neg Q \Rightarrow \neg P \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x > \varepsilon$

Esim. $\varepsilon = \frac{x}{2}$, $x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} > 0$

$x > \varepsilon \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow Tosi$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ on tosi, joten $P \Rightarrow Q$ on tosi. $\square$