Tehtävä: 1. Olkoon $f : A \to B, f(x) = x^2 + 2$ funktio ja $B = \{y \in \mathbb{N} | y \leq 6\}$
(a) Etsi laajin joukko $A \subset \mathbb{Z}$ ja sitä vastaava arvojoukko R_f.
(b) Määritä alkioiden 6 ja 2 alkukuvajoukot.

Vastaus: (a) $x^2 + 2 = f(x)$. Näin ollen: $f(x) = y \leq 6$
$x^2+2 \leq 6 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \vee x \geq -2$ Joukko $A \subset \mathbb{Z}$ eli $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Arvojoukko saaadaan sijoittamalla arvot funktioon $f(x)$.
$0^2+2 = 2$, $1^2+2 = 3$, $2^2+2 = 6$. Negatiiviset antavat samat arvot. Näin ollen $B = \{2, 3, 6\}$.
V: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, B = \{2, 3, 6\}$
(b) kun $y = 6$, $x^2 + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \{-2, 2\}$
kun $y = 2$, $x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \{0\}$

Tehtävä: 2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x - 6$ ja $g : M_g \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{2x+3}{x-3}$ reaalifunktioita. (a) Määritä $f^{-1}(12)$.
(b) Määritä funktion g laajin mahdollinen määrittelyjoukko $M_g \subset \mathbb{R}$.
(c) Määritä $g^{-1}(0)$.

Vastaus:

(a) $x^2 + 5x - 6 = -12 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4*1*6}}{2*1} \Leftrightarrow \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow$ $x = -3 \vee x = -2$.
(b) Funktiota g ei ole määritelty, kun $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \to \mathbb{R} \backslash \{3\}$
(c) $\frac{2x+3}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Tehtävä: 3. Olkoon $f(x) = \sqrt{\frac{x+8}{x^2-2}}$ reaalifunktio.
(a) Mikä on f:n määrittelyjoukko? (b) Määritä $f(-1)$, $f(4)^{-1}$ ja $f^{-1}(1)$.
(c) onko f injektio?

Vastaus: (a) $x^2 - x \not{0} \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \vee x \neq 1$ Myös $\frac{x+8}{x^2-x} \geq 0$.
$\frac{x+8}{x^2-x} = 0$, kun $x + 8 = 0$, eli $x = -8$.
Merkkikaaviolla saadaan: $-8 \leq x < 0 \vee x > 1$ Eli $M_f = [-8, 0) \cup (1, \infty)$.
(b) $f(-1) = \sqrt{\frac{-1+8}{(-1)^2-(-1)}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$
$f(4)^{-1} = \frac{1}{f(4)} = 1/\sqrt{\frac{4+8}{4^2-4}} = 1/\sqrt{1} = 1$
$f^{-1}(1) \Rightarrow \sqrt{\frac{x+8}{x^2-x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+8}{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x + 8 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$
$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4*1*(-8)}}{2*1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x = -2 \vee x = 4$
(c) Funktio f ei ole injektio. Injektiossa jokaisella lähtöjoukon alkiolla on tasan yksi maalijoukon alkio. Esimerkiksi $f^{-1}(1)$ saa kaksi arvoa, eli kyseessä ei voi olla injektio.

Tehtävä: 4. $f(x) = x^3 + 1$. Laske $(f \circ f)(4)$.

Vastaus: $(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(4^3 + 1) = f(65) = 65^3 + 1 = 274626$.

Tehtävä: 6. Ohessa on funktion f kuvaaja. Hahmottele kohdat $a - d$ sekä kynällä ja paperilla että Matlabilla. (a) $f(x) - 2$ (b) $f(x-3)$ (c) $\frac{1}{4}f(x)$ (d) $f(-\frac{1}{2}x)$.

Vastaus: MATLAB -sivu tehtävien lopussa.

Tehtävä: 7. Osoita, että reaalifunktio $f(x) = x^3$ on aidosti kasvava. Derivaattaa ei saa käyttää.

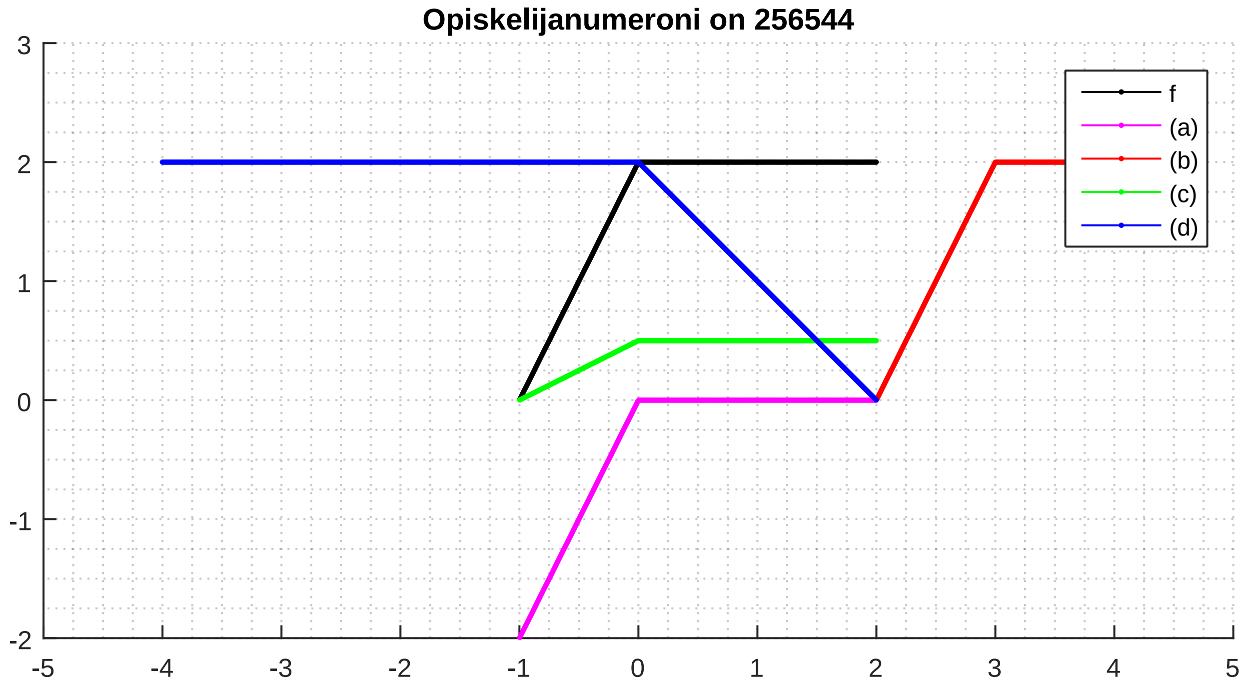
Vastaus: Väite: kun $x < y$ niin $x^3 < y^3$. Voidaan muuttaa muotoon $0 < y - x$ ja $0 < y^3 - x^3$. Etsitään sopiva kerroin:

$$
\begin{array}{r|l}
 & X^2 \quad + YX + Y^2 \\
\hline
-X+Y & -X^3 \qquad\qquad\qquad + Y^3 \\
 & X^3 - YX^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -YX^2 \\
 & \quad YX^2 - Y^2X \\
\cline{2-2}
 & \qquad -Y^2X + Y^3 \\
 & \qquad Y^2X - Y^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Tarkistetaan, onko $P = (x+y)^2 + xy > 0$ Koska $x < y$, on kolme mahdollisuutta:
1) $x > 0 \wedge y > 0$ Jolloin $xy > 0 ja (x+y)^2 > 0 \Rightarrow$ Kelpaa.
2) $x < 0 \wedge y > 0$ Jolloin $xy < 0$, mutta $(x+y)^2 > 0$ Ja koska $x < y$, $y^2 > x * y \Rightarrow$ Kelpaa.
3) $x < 0 \wedge y \leq 0$ jolloin $xy \geq 0$ ja $(x+y)^2 > 0 \Rightarrow$ Kelpaa. $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x \Rightarrow 0 < y - x| * P \Rightarrow 0 < (y-x)(y^2 + xy + x^2) \Leftrightarrow 0 < y^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 < y^3 \quad \square$

Tehtävä: 8. Olkoon $f : [0, \infty) \to [2, \infty), f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$
(a) Osoita, että f on bijektio ja määritä käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke.
(b) Tarkasta laskusi laskemalla $f(f^{-1}(y)$ ja $f^{-1}(f(x))$. (c) Palauta Moodleen.

Vastaus: (a) $y = \sqrt{3x^2+4} \Leftrightarrow y^2 = 3x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2-4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y^2-4}{3}}$
$\Rightarrow$ On olemassa käänteisfunktio.
$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y^2-4}{3}} = (g \circ h)(y)$, missä $g(y) = \sqrt{y}$ ja $h(y) = \frac{y^2-4}{3}$.
Lause 2.15 $\Rightarrow \sqrt{y}$ on aidosti kasvava.
Voidaan myös havaita, että $\frac{y^2-4}{3}$ on aidosti kasvava, kun $y \geq 0$.
Näin ollen f^{-1} on aidosti kasvava.
kun $y = 2$ (minimi) $\to x = \sqrt{\frac{2^2-4}{3}} = \sqrt{0} = 0$. Siis, jokaisella $y \in [2, \infty)$ yhtälöllä $y = f(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x \in [0, \infty)$. $\quad \square$
(b) $f(f^{-1}(y)) \Leftrightarrow f(\sqrt{\frac{y^2-4}{3}}) \Leftrightarrow y = \sqrt{3 * \frac{y^2-4}{3}^2 + 4} \Leftrightarrow y = \sqrt{y^2 - 4 + 4} = |y| = y$
ja $(f^{-1}(f(x)) \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{3x^2+4}) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{(\sqrt{3x^2+4})^2 - 4}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3x^2+4-4}{3}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$


Opiskelijanumeroni on 256544
3
2
1
0
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
f
(a)
(b)
(c)
(d)