Tehtävä: 1. Sievennä (a) $log_2(12)+log_2(2)-log_2(3)$ (b) $log_{e^2}(e^{4a}+ae^{4a})$ ja ratkaise (c) $arcsin(\frac{-1}{\sqrt{2}})$ (d) $arccos(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ilman laskinta.

Vastaus: (a) $log_2(12)+log_2(2)-log_2(3) = log_2(24)-log_2(3) = log_2(\frac{24}{3}) = log_2(8) = log_2(2^3) = 3$
(b) $log_{e^2}(e^{4a}+ae^{4a}) = \frac{ln(e^{4a}+ae^{4a})}{ln(e^2)} = \frac{ln(e^{4a}*(1+a))}{2} = \frac{1}{2}(ln(e^{4a})+ln(1+a)) = \frac{1}{2}(4a+ln(1+a))$
(c) $arcsin(-1/\sqrt{2}) = x \Rightarrow sin(x) = -1/\sqrt{2}$ Muistikolmio (kat. 1 ja 1, hyp. 2) $\Rightarrow x = -\pi/4$
(d) $arccos(1/\sqrt{2}) = x \Rightarrow cos(x) = 1/\sqrt{2}$ Muistikolmio (kat. 1 ja 1, hyp. 2) $\Rightarrow x = \pi/4$

Tehtävä: 2. Sievennä (a) $(\frac{64}{8})^{4/3}$ (b) $\frac{6a^2}{(a^2\sqrt{a})^3}$ (c) $\frac{2^{x-1}8^{x+1}}{4^{2x+4}}$

Vastaus: (a) $(\frac{64}{8})^{4/3} = \frac{\sqrt[3]{64}^4}{\sqrt[3]{8}^4} = \frac{256}{16} = 16$
(b) $\frac{6a^2}{(a^2\sqrt{a})^3} = 6\frac{a^2}{(a^{5/2})^3} = 6\frac{a^2}{a^{15/2}} = \frac{6}{a^{9/2-4/2}} = \frac{6}{a^{11/2}}$
(c) $\frac{2^{x-1}8^{x+1}}{4^{2x+4}} = \frac{2^{x-1}2^{3x+3}}{2^{4x+8}} = \frac{2^{4x+2}}{2^{4x+8}} = 2^{4x+2-4x-8} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Tehtävä: 3. Tiedetään että $sin(\theta) = \frac{4}{5}$ ja $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Määritä $cos(\theta)$ ja $tan(\theta)$.

Vastaus: $sin(\theta) = 4/5$. $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow cos(\theta) = \pm\sqrt{1-sin^2(\theta)} = \pm\sqrt{1-(4/5)^2} = \pm\frac{3}{5}$ Vaadittiin tietty ympäristö $\Rightarrow cos(\theta) = -3/5$
$tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{4/5}{-3/5} = -20/15 = -4/3$

Tehtävä: 4. Ratkaise kaikki $x \in \mathbb{R}$, jotka toteuttavat yhtälön (a) $5cosh(x)+3sinh(x) = 4$, (b) $arcsinh(0) = x$, (c) $arctanh(-1/3) = x$.

Vastaus: (a) $5cosh(x) + 3sinh(x) = 4 \Leftrightarrow 5(\frac{e^{-x}+e^x}{2}) + 3(\frac{-e^{-x}+e^x}{2}) = 4 \Leftrightarrow \frac{8e^x+2e^{-x}}{2} = 4 \Leftrightarrow 4(e^x)^2 + 1 = 4e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x + 1/4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2(1/2e^x) + (1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow (e^X - 1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1/2 \Leftrightarrow x = ln(1/2) = ln(2^{-1}) = -ln(2)$
(b) $arcsinh(0) = x \Leftrightarrow sinh(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x$ On tosi vain jos ja vain jos $x = 0$.
(c) $arctanh(-1/3) = \frac{1}{2}ln(1-1/3) - \frac{1}{2}ln(1+1/3) = \frac{1}{2}ln(\frac{1-1/3}{1+1/3}) = \frac{1}{2}ln(\frac{1}{2})$

Tehtävä: 6. Onko olemassa lukua $a \in \mathbb{R}$ siten, että raja-arvo $lim_{x \to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ on olemassa? Jos on, niin mikä raja-arvo tällöin on?

Vastaus: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ jaetaan toisella tekijällä $3x^2 + ax + a + 3$ ja määrätään a siten, että jako menee tasan. Valitaan $x+2$ ja etsitään sopiva a.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \quad +9 \\ \hline x+2) & 3x^2 + 15x + 18 \\ & -3x^2 \quad -6x \\ \hline & 9x + 18 \\ & -9x - 18 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Saadaan $\frac{(3x+9)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3x+9}{x-1} \Rightarrow$ selvitetään raja-arvo. Yhtälö on määritelty kohdassa $x = -2$ joten raja-arvo on funktion arvo: $\frac{3(-2)+9}{-2-1} = \frac{3}{-3} = -1$

Tehtävä: 7. Olkoon $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = M$ Osoita määritelmän avulla, että $\lim_{x \to a}(f(x) + 2g(x)) = L + 2M$.

Vastaus: Olkoon $\epsilon > 0 m.v.$ ja $\delta : min(\delta_1, \delta_2)$
Jos $0 < |x - a| < \delta$ niin
$|(f(x) + 2g(x)) - (L + 2M)| = |(f(x) - L) + (2g(x) - 2M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| + |g(x) - M| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$
Koska $\lim_{x \to a} f(x) = L$ niin $\exists \delta_1 > 0$ s.e. $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ kun $0 < |x - a| < \delta_1$
Koska $\lim_{x \to a} g(x) = M$ niin $\exists \delta_2 > 0$ s.e. $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{4}$ kun $0 < |x - a| < \delta_2$
Siten summa $f(x) + g(x) + g(x)$ saa kohdassa a raja-arvon $L + M + M = L + 2M$ $\square$

Tehtävä: 8. Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla reaalifunktio $f(x) = log_a(\frac{4}{x-3})$, $0 < a < 1$ saa ei-negatiivisia arvoja. Derivaattaa ei saa käyttää.

Vastaus: $log_a(\frac{4}{x-3}) = \frac{ln(\frac{4}{x-4})}{ln(a)}$. ln(a) on aina negatiivinen $\Rightarrow$ myös osoittajan täytyy olla negatiivinen tai nolla. $\Rightarrow ln(\frac{4}{x-3}) \leq 0 \Rightarrow \frac{4}{x-3} \leq 1 \Rightarrow x - 3 \leq 4 \Rightarrow x \geq 7$