Tehtävä: 1. (a) Määritä vakio b siten että funktio f on kaikkialla jatkuva:

$$f(x) = \begin{cases} bx - 7, & x < 4 \\ x^2 - 2, & x \geq 4 \end{cases}$$

(b) Määritä a:n ja b:n arvot siten, että f on jatkuva $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 6 \\ a, & x = 6 \\ bx^2, & x > 6 \end{cases}$$

Vastaus: (a) Raja-arvojen täytyy olla samat kohdassa $x = 4$: $4^2 - 2 = 14$ Eli $4b - 7 = 14 \Rightarrow 4b = 21 \Rightarrow b = \frac{21}{4}$

(b) Raja-arvojen täytyy olla samat kohdassa $x = 6$. Huomataan, että $4x - 2$ on jatkuva kohdassa $x = 6$ joten: $4*6-2 = 22$ eli $a = 22$ ja $36b = 22 \Rightarrow b = \frac{22}{36}$

Tehtävä: 2. Laske raja-arvot: (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ (c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

Vastaus: (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+5)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+5}{x+2} \Rightarrow \dfrac{4}{1} = 4$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x}^{(a}-\frac{1}{a}^{(x}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(x-a)}{ax(x-a)} = \dfrac{-1}{a^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{(4+4)(2+2)} = \dfrac{1}{32}$

Tehtävä: 3. Derivoi (a) $f(x) = e^{x^4}$ (b) $f(x) = cos(cos(x))$ (c) $f(x) = x^2 ln(7x)$

Vastaus: (a) $D_x e^{x^4} = e^{x^4} D_x x^4 = e^{x^4} 4x^3$

(b) $D_x cos(cos(x)) = sin(cos(x)) D_x cos(x) = sin(cos(x)) sin(x)$

(c) $D_x x^2 ln(7x) = 2xln(7x) + x^2 7 \frac{1}{7x} = 2xln(7x) + x$

Tehtävä: 4. Laske derivaatat (a) $f_a(x) = x^5 + 4x^3 - 6x^2 + \pi$ (b) $f_b(x) = \frac{x^4-2}{x+1}$

(c) $f_c(x) = 2sin(cos^2(x))$ (d) $f_d = (3\sqrt{3x} + \frac{2}{x})(4x^2 - x)$

(e) $f_e(x) = \frac{8}{\sqrt{x}}$ (f) $f_f(x) = cosh^2(x)$

Vastaus: (a) $D_x x^5 + 4x^3 - 6x^2 + \pi = 5x^4 + 12x^2 - 12x$

(b) $D_x \frac{x^4-2}{x+1} = \frac{D_x(x^4-2)*(x+1)-(x^4-2)D_x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(4x^3*(x+1))-(x^4-2)*1}{(x+1)^2} = \frac{4x^3}{x+1} - \frac{x^4-2}{(x+1)^2}$

(c) $D_x 2sin(cos^2(x))$. Merkitään $f(x) = 2sin(x)$ ja $g(x) = cos^2(x)$. Jaetaan $g(x)$: $h(x) = x^2$ ja $j(x) = cos(x)$. Lasketaan $g'(x) = j'(x)h'(j(x)) = -sin(x)2cos(x)$ lasketaan $f_c(x) = g'(x)f'(g(x)) = -2cos(x)sin(x)(2cos(cos^2(x))$
$= -4cos(x)sin(x)cos(cos^2(x)) = -2sin(2x)cos(cos^2(x))$

(d) $D_x(3\sqrt{3x}+\frac{2}{x})(4x^2-x) = D_x(3\sqrt{3x}+\frac{2}{x})*(4x^2-x)+(3\sqrt{3x}+\frac{2}{x})D_x(4x^2-x) = \frac{18^2}{\sqrt{3x}} - 8 - \frac{9x}{2\sqrt{3x}} + \frac{2}{x} + 24\sqrt{3x}x + 16 - 3\sqrt{3x} - \frac{2}{x} = \frac{90x^2}{\sqrt{3x}} - \frac{27x}{2\sqrt{3x}} + 8$

(e) $D_x 8x^{-1/3} = 8(-1/3x^{-4/3}) = -\frac{8}{3x^{4/3}}$

(f) $D_x cosh^2(x)$ Jaetaan $f(x) = x^2$ ja $g(x) = cosh(x)$: $g'(x)f'(g(x)) = sinh(x)2cosh(x)$

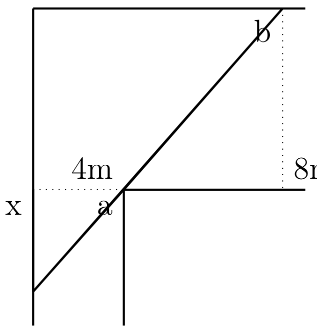
Tehtävä: 6. Käytä MATLABIA ja vastaa kysymyksiin.

Vastaus: 1.Pelkkä tähti kertoo yksittäisiä arvoja, pistetähti vektoroi funktion ja ohittaa array-loopin. 2. Tekee muuttujasta x symboolisen.
3. Quasi-Newton 4. Ei osu.

Tehtävä: 7.Laske derivaatta derivaatan määritelmän avulla: (a) $f(x) = x^2$
(b) $g(x) = \frac{1}{x}$ (c) $k(x) = \sqrt{x}$

Vastaus: Määritelmä: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
(a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$
(b) $g'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} -\dfrac{1}{hx + x^2} = \dfrac{1}{x^2}$
(c) $k'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Tehtävä: 8. Ohut suora putki ($d = 0$) kuljetetaan vaakatasossa $4m$ leveältä käytävältä kulman ympäri $8m$ leveälle käytävälle. Kuinka pitkä putki voi olla?



Vastaus: Muodostetaan kaksi yhdenmuotoista kolmiota, joiden hypotenuusat (a ja b) muodostavat putken. a:n pituus saadaan pythagoraalla $a = \sqrt{x^2 + 4^2}$
b:n pituus saadaan verrannosta $\frac{a}{x} = \frac{b}{8} \Rightarrow b = \frac{8a}{x}$ Näin ollen putken pituus on $a + b = \sqrt{x^2 + 4^2} + \frac{8a}{x} = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{8\sqrt{x^2+16}}{x} = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{8}{x}\sqrt{x^2 + 16} = \sqrt{x^2 + 16}(1 + \frac{8}{x}) = (x^2 + 16)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{8}{x})$ Jonka derivaatan minimikohtasta saadaan pisin mahdollinen putki.
$D_x(x^2 + 16)^{\frac{1}{2}} D_x(1 + \frac{8}{x}) = 0$
$2x * \frac{1}{2}(x^2 + 16)^{-\frac{1}{2}} * (1 + \frac{8}{x}) + (x^2 + 16)^{\frac{1}{2}} * (-\frac{8}{x^2}) = 0$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} * (1 + \frac{8}{x}) + \sqrt{x^2 + 16} * (-\frac{8}{x^2}) = 0$
$x(1 + \frac{8}{x}) + (x^2 + 16)(-\frac{8}{x^2}) = 0$
$x(x^2 + 8x)(x^2 + 16)(-8) = 0$
$x^3 + 8x^2 - 8x^2 - 128 = 0$
$x^3 = 128$
$x = \sqrt[3]{128} (\approx 5)$ Laskemalla derivaatta x:n molemmin puolin voidaan todeta, että kyseessä on minimi: $f'(3) \approx -2 < 0$ ja $f'(6) \approx 0.4 > 0$ Voidaan siis laskea putken maksimipituus sijoittamalla $\sqrt[3]{128} \approx 5$ alkuperäiseen yhtälöön.
$f(5) = (\sqrt{5^2 + 16})(1 + \frac{8}{5}) = \frac{32}{5}\frac{13}{5} = \frac{416}{25} = 16 + \frac{16}{25} \approx 16.6m$
$(f(\sqrt[3]{128}) = 16.648m)$