

Tehtävä: 1. Pesukoneen rumpu pyörii kahdella nopeudella: $423rpm$ ja $640rpm$. Rummun sisähalkaisija on $0.470m$. (a) Mikä on pyykkiin kohdistuvien maksimivoimien suhde eri nopeuksilla? (b) Mikä on pyykin maksimi tangentiaalinen nopeus eri nopeuksilla? (c) Mikä on pyykin maksimi tangentiaalinen nopeus ja vastaava keskihakukiihtyvyys? Esitä kiihtyvyys g :n avulla.

Vastaus: $423rpm = 7.050r/s$ ja $640rpm = 10.667r/s$

$$7.050r/s = T_1 = 0.141849s \text{ ja } 10.667r/s = T_2 = 0.09375s$$

$$D = 2R \Rightarrow R = 0.470m/2 = 0.235m$$

$$(a) a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \text{ Eli } a_{c1} = \frac{4\pi^2 r}{T_1^2} \text{ ja } a_{c2} = \frac{4\pi^2 r}{T_2^2}$$

$$F_{kok} = G + ma = mg + ma \Rightarrow \frac{mg + ma_{c1}}{mg + ma_{c2}} = \frac{g + a_{c1}}{g + a_{c2}} = \frac{9.81m/s^2 + \frac{4\pi^2 r}{T_1^2}}{9.81m/s^2 + \frac{4\pi^2 r}{T_2^2}} = \frac{9.81m/s^2 + 461.0787m/s^2}{9.81m/s^2 + 1055.6m/s^2} =$$

0.4420 Eli hitaammalla nopeudella pyykkiin kohdistuu 0.442-kertainen voima nopeampaan verrattuna. (toisinpäin kerroin on 2.2625)

$$(b) T_2 = 0.09375s, T_1 = 0.141849s, R = 0.235m \quad a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow v^2 * T^2 = 4\pi^2 r^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2}{T_2^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4\pi^2 * (0.235m)^2}{(0.09375s)^2}} = 15.7499m/s \approx 15.75m/s$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2}{T_1^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4\pi^2 * (0.235m)^2}{(0.141849s)^2}} = 10.4093m/s \approx 10.41m/s$$

$$(c) v_2 = 15.7499m/s \text{ ja } a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a_c = \frac{(15.7499m/s)^2}{0.235m} = 1055.6m/s^2 \text{ ja } g:n \text{ suhteena: } \frac{1055.6m/s^2}{9.81m/s^2} * g = 107.6g$$

Tehtävä: 2. Energiaa varastoidaan umpinaisen kiekon muotoiseen vauhtipyörään ($R = 1.20m$, $M = 70.0kg$). Kiekon kehän maksimi $a_c = 3500m/s^2$.

Mikä on suurin mahdollinen kineettinen energia, joka vauhtipyörään voidaan varastoida?

Vastaus: $a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{a_c r}$ ja $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{a_c r}}{r}$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m r^2 \left(\frac{\sqrt{a_c r}}{r} \right)^2 = \frac{1}{4} m r^2 \frac{a_c r}{r^2} = \frac{1}{4} m a_c r = \frac{70.0kg * 3500m/s^2 * 1.2m}{4} = 73500J \approx 74kJ$$

Tehtävä: 3. Lanka on kierretty ohuen vanteen päälle, jonka säde on $0.0800m$ ja massa $0.180kg$. Jos langan vapaata päätä pidetään paikoillaan ja vanteen annetaan pudota, laske (a) langan jännitys (b) Aika, jona vanne putoaa $0.750m$ (c) vanteen kulmanopeus kun se on pudonnut $0.750m$.

Vastaus: (a) Vanteen $I = MR^2$. Pystysuunnassa vaikuttavia voimia ovat vetovoima G ja langan jännitysvoima $-T$. Saadaan: $\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_y$ ja $\sum \tau = TR = I\alpha_z = MR^2\alpha_z$ Tiedetään $a_z = R\alpha_z$ Jolloin $\sum F_y = Ma_y$ ja $\sum \tau = TR = \frac{Ia_y}{R} = MRa_y$ saadaan $a_y = \frac{T}{M}$ ja $a_y = \frac{Mg - T}{M}$ eli $\frac{T}{M} = \frac{Mg - T}{M} \Rightarrow M(Mg - T) = TM \Rightarrow Mg - T = T \Rightarrow T = \frac{1}{2}Mg = 0.5 * 0.180kg * 9.81m/s^2 = 0.88N$

$$(b) a_y = \frac{T}{M} = \frac{1/2Mg}{M} = 1/2g \quad x = (x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2) \Rightarrow 2x = at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} =$$

$$\sqrt{\frac{2x}{\frac{T}{M}}} = \sqrt{\frac{2 * 0.750m}{0.5g}} = 0.5530s \approx 0.55s$$

$$(c) \omega = at \text{ ja } \alpha = a/r \Rightarrow \omega = \frac{at}{r} = \frac{0.5 * 9.81m/s^2 * 0.5530s}{0.0800m} = 33.9058rad/s \approx 34rad/s$$

Tehtävä: 4. Umpinaisen kiekon muotoisen tahkokiekkon massa on 50.0kg ja säde 0.520m . Se pyörii 850rpm . Kun tahkokiekkoa vasten painetaan terää voimalla 160N , se pysähtyy ajassa 7.50s . Mikä on tahkon ja terän välinen kitkakerroin μ ?

Vastaus: Pysäyttämiseen tarvittava energia on sama kuin kiekon kineettinen energia: $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega^2$ $1\text{rad/s} = 60/2\pi \text{rpm} \Rightarrow 850\text{rpm}/(60/2\pi) = 89.01179\text{rad/s} \Rightarrow E_K = \frac{1}{4}50.0\text{kg} * (0.520\text{m})^2 * (89.01179\text{rad/s})^2 = 26780\text{J}$
Tasaisesti kiihtyvän pyörimisliikkeen kiihtyvyys: $\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow -\omega_0 = \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{-\omega_0}{t} = \frac{-89.01179\text{rad/s}}{7.50\text{s}} = -11.8682\text{rad/s}^2$ Eli kiertymä:
 $\Phi = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 89.01179\text{rad/s} * 7.5\text{s} - 0.5 * 11.8682\text{rad/s}^2 * (7.5\text{s})^2 = 333.7953\text{rad}$
 $E - W = 0 \Rightarrow E = W, W = M_\mu \Phi \Rightarrow M_\mu = \frac{W}{\Phi} = \frac{26780\text{J}}{333.7953\text{rad}} = 80.2288\text{Nm}$
Voiman momentti: $M = Fr = 160\text{N} * 0.520\text{m} = 83.2\text{Nm}$
Kitkakerroin: $\frac{M_\mu}{M} = \frac{80.2288\text{Nm}}{83.2\text{Nm}} = 0.9643 \approx 0.96$

Tehtävä: 5. Neutronitähden tiheys on noin 10^{14} tavalliseen kiinteään aineeseen verrattuna. Oletetaan, että tähteä voidaan käsitellä umpinaisena tasalaatuisena pallona sekä tavallisena, että neutronitähtenä. Alkuperäisen tähden säde oli $7.0 * 10^5\text{km}$ ja loppusäde 16km . (a) Tähtien alkuperäinen akselinkiertoaika oli 30 päivää, mikä on neutronitähden kulmanopeus? (b) Laske kineettinen energia romahduksen jälkeen suhteessa ennen romahdusta.

Vastaus: (a) $30 * 24 * 60 = 43200\text{min} \Rightarrow \frac{1}{43200}\text{rpm} = 2.4241 * 10^{-6}\text{rad/s}$
Pyörimismäärä säilyy eli $L_1 = L_2 \Rightarrow J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{J_1\omega_1}{J_2} = \frac{0.4mr_1^2\omega_1}{0.4mr_2^2} \Rightarrow$
 $\omega_2 = \frac{0.4*(7.0*10^5)^2*2.4241*10^{-6}}{0.4*16^2} = 4639.9\text{rad/s} \approx 4600\text{rad/s}$
(b) $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$ Eli suhdelukuna $\frac{E_{Kn}}{E_{Kt}} = \frac{0.5*0.4*m*(16\text{km})^2*(4639.9\text{rad/s})^2}{0.5*0.4*m*(7.0*10^5\text{km})^2*(2.4241*10^{-6}\text{rad/s})^2} = 1.9141 * 10^9 \approx 1.9 * 10^9$

Tehtävä: 6. (a) Laske moottorin vääntömomentti, kun sen teho on 150kW ja kierrosnopeus 4000rpm (b) Moottorin akseliin kiinnitetään massaton kiekko ($D = 0.400\text{m}$), ja moottoria käytetään nostamaan kuorma, joka on ripsutettu kiekon ympäri kierretyn vaiherin päähän. Mikä on maksimikuorma, joka voidaan nostaa vakionopeudella? (c) Millä nopeudella kuorma tällöin nousee?

Vastaus: (a) $4000/(60/(2\pi)) = 418.8790\text{rad/s}, P = M\omega \Rightarrow M = \frac{P}{\omega} \Rightarrow$
 $M = \frac{150000\frac{\text{Nm}}{\text{s}}}{418.8790\text{rad/s}} = 358.0986\text{Nm} \approx 360\text{Nm}$
(b) $D = 2R \Rightarrow R = 0.200\text{m}, M = FR = mgR \Rightarrow m = \frac{M}{gR} = \frac{358.0986\text{Nm}}{9.81\text{m/s}^2*0.200\text{m}} = 182.5171\text{kg} \approx 180\text{kg}$
(c) $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow v = \omega r = 418.8790\text{rad/s} * 0.200\text{m} = 83.7758\text{m/s} \approx 83.8\text{m/s}$