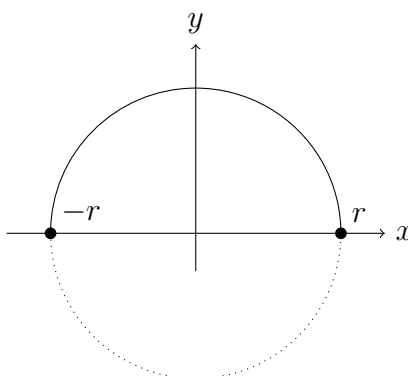


# MAT-01160 Matematiikka 1, harjoitus 6, T5

3. lokakuuta 2015

**Tehtävä:** Laske  $r$ -säteisen ympyrän piiri integroimalla.

**Ratkaisu:** Ympyrän yhtälöstä  $x^2 + y^2 = r^2$  saadaan  $f(x) = y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ . Valitaan ympyrän keskipisteeksi origo ja valitaan integroitavaksi ympyrän positiivisella puolella sijaitseva osa:  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$  joka kerrotaan lopuksi kahdella.



$$\begin{aligned} \text{piiri} &= \left( \int_{-r}^r \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \right) * 2 \\ &= \left( 2 \int_0^r \sqrt{1 + \left( -\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx \right) * 2 \\ &= \left( 2 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \right) * 2 \\ &= \left( 2 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \right) * 2 \\ &= \left( 2 \int_0^r \sqrt{\frac{1}{1 - (x/r)^2}} dx \right) * 2 \\ &= \left( 2r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \right) * 2 \quad (\text{sijoitus: } u = x/r) \\ &= \left( 2r \int_0^1 \arcsin(u) \right) * 2 \\ &= (2r(\arcsin(1) - \arcsin(0))) * 2 = 2\pi r \quad . \end{aligned}$$

**Vastaus:**  $2\pi r$