MAT-01160 2015-01 Teemu Salminen

Tehtävä: 1. (a) Määritä funktion $f(x) = (x+6)^4$ integraalifunktio (b) Laske osittaisintegroimalla $\int xe^{3x}$

Vastaus: (a) $F(x) = \frac{1}{5}(x+6)^{4+1} = \frac{1}{5}(x+6)^5$
(b)$f(x) = xe^{3x} = e^{3x}x \Rightarrow f'(x)g(x)$, missä $f'(x) = e^{3x}$ ja $g(x) = x$
josta saadaan $f(x) = \frac{e^{3x}}{3}$ ja $g'(x) = 1$
Osittaisintegroinnin kaava $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow$
$\frac{e^{3x}}{3} * x - \int \frac{e^{3x}}{3} * 1 \Leftrightarrow \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{1}{3}3e^{3x}dx \Leftrightarrow \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C \Leftrightarrow \frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)$

Tehtävä: 2. Laske integraali $\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+2x-39}{x^2-2x-8}dx$

Vastaus:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 \quad - 2x \quad + 7 \\ \cline{2-2}
x^2 - 2x - 8 \big) & x^4 - 4x^3 \quad + 3x^2 \quad + 2x - 39 \\
 & -x^4 + 2x^3 \quad + 8x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad - 2x^3 + 11x^2 \quad + 2x \\
 & \quad 2x^3 \quad - 4x^2 - 16x \\ \cline{2-2}
 & \qquad 7x^2 - 14x - 39 \\
 & \qquad - 7x^2 + 14x + 56 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 17
\end{array}
$$

Eli $\int x^2 - 2x + 7 + \frac{17}{x^2-2x-8}dx$ Tehdään osamurtokehitelmä: $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$
$x = -2 \vee x = 4$ Josta saadaan $\frac{7}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+2)}{x^2-2x-8}$
Josta selvitetään A ja B yhtälöryhmällä: $\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A + 2B = 17 \end{cases}$
Josta $A = -B \Rightarrow 4B + 2B = 17 \Rightarrow B = \frac{17}{6}$ ja $A = -\frac{17}{6}$
Nyt $\int x^2 - 2x + 7 + \frac{-17}{6(x+2)} + \frac{17}{6(x-4)} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7x - \frac{17}{6}ln|x+2| + \frac{17}{6}ln|x-4|$

Tehtävä: 3. Laske raja-arvot käyttäen l'Hospitalin sääntöä. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{4x}$
(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)}{x^2+x}$ (c) $\lim x \to \infty \dfrac{8x^2-1}{x * ln(x)}$

Vastaus: (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{4x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4e^{4x}}{4} = 1$
(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)}{x^2+x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos(x)}{2x+1} = 1$
(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2-1}{x * ln(x)} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{16x}{ln(x)+1} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{16}{\frac{1}{x}} = \infty$

Tehtävä: 4. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{2x}}$

Vastaus: $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x \to \infty} exp(\dfrac{\frac{1}{2}(e^x+x)}{x}) = exp(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ln(e^x) + ln(1 + \frac{x}{e^x})}{2x}) =$
$exp(\dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{log(e^x)}{x}}{2}) = exp(\dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x}(=1)}{2}) = exp(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$

Tehtävä: 6. Kerro, mitä komennot $diff$, $polyval$, $polyint$, $simplify$ ja sen ominaisuus $Steps$ tekevät.

Vastaus: $diff$ laskee eron perättäisten x:n elementtien välillä.
$polyval$ palauttaa polynomin arvon aneetussa kohdassa.
$polyint$ palauttaa polynomin integraalin.
$simplify$ pyrkii yksinkertaistamaan annetun lausekkeen ja $Steps$ määrittelee, kuinka monta sykliä tätä ajetaan.

Tehtävä: 7. Integroi (a) $\int x^2 + 3x - 2dx$ (b) $\int sin(x)cos(x)dx$ (c) $\int e^{2x}dx$
(d) $\int xsin(x^2)dx$ (e) $\int xe^x dx$ (f) $\int \frac{5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Vastaus: (a) $\int x^2 + 3x - 2dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$
(b) $\int sin(x)cos(x)dx = \int ucos(x)\frac{du}{-cos(x)}(sin(x) = u \Rightarrow \int u*(-x)du = \int sin(x)(-x)dx = \frac{sin^2(x)x}{2x} = \frac{sin^2(x)}{2}$
(c) $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}$
(d) $\int x * sin(x^2)dx = \frac{x*(-cos(x^2))}{2x} = \frac{-cos(x^2)}{2}$
(e)$\int xe^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$
(f) $\int \frac{5}{\sqrt{1+x^2}}dx = 5asinh(x)$